Planar Strips and An End-Concept For Digraphs

Jörg Zuther

Abstract

This thesis is divided into two parts. In the first part, a sort of end concept for directed graphs is introduced and examined. For two one-way infinite directed paths Θ and Θ' of a digraph Δ define: a) $\Theta \leq \Theta'$ iff there are infinitely many pairwise disjoint directed paths from Θ to Θ'; b) $\Theta \sim \Theta'$ iff $\Theta \leq \Theta'$ and $\Theta' \leq \Theta$. The relation $\leq$ is a quasiorder, and hence $\sim$ is an equivalence relation (whose classes are called *ends*). Furthermore, $\leq$ induces a partial order on the set of ends of a digraph. Some necessary and and also some sufficient conditions are presented for an abstract order to be representable by the end order of a digraph. Further, there are several results concerning endfaithful super- and subdigraphs, translations of digraphs and ends of vertex-transitive digraphs. The main results of the first part are:

1) Every countable digraph with an initial vertex and no pair of $\leq$-comparable ω-ends contains an ω-endfaithful, spanning arborescence.

2) Let Δ be an infinite, connected, vertex-transitive digraph. If the underlying undirected graph of Δ has exactly two ends, then Δ is a directed strip. Every directed strip has exactly two composed ends. If Δ is locally finite and the underlying undirected graph of Δ has at least $2^{\aleph_0}$ ends, then Δ has at least $2^{\aleph_0}$ composed ends.

The second part of this thesis gives a complete classification of the vertex-transitive, planar strips. It turns out that any such strip has one of the vertex types (3^6), $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, (4^4), (6^3), and (4.8^2). The second parameter of the classification is κ_∞, which is the minimal number of vertices one has to remove from the graph to obtain at least two infinite components. In most cases, a third parameter is necessary. This parameter ranges over a finite set of values.

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird eine Art Endenkonzept für gerichtete Graphen eingeführt und untersucht. Sind Θ und Θ' zwei gerichtete Wege in einem Digraphen Δ, so bedeute a) $\Theta \leq \Theta'$, daß es unendlich viele paarweise disjunkte $\Theta \to \Theta'$-Wege gibt und b) $\Theta \sim \Theta'$, daß sowohl $\Theta \leq \Theta'$ als auch $\Theta' \leq \Theta$ gilt. Da $\leq$ eine Quasiordnung ist, ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, und $\leq$ induziert eine partielle Ordnung auf der Menge der $\sim$-Klassen, die *Enden* genannt werden. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür vorgestellt, daß eine abstrakte Ordnung durch die Endenordnung eines Digraphen darstellbar ist. Des weiteren enthält diese Arbeit Resultate über endengleiche Ober- und Unterdigraphen, Translationen von Digraphen sowie Enden von eckentransitiven Digraphen. Die Hauptergebnisse des ersten Teils sind:

1) Jeder abzählbare Digraph mit einer Anfangsecke, in dem es kein Paar $\leq$-vergleichbarer ω-Enden gibt, enthält eine ω-endengleiche, aufspannende Arboreszenz.

2) Sei Δ ein unendlicher, zusammenhängender und eckentransitiver Digraph. Wenn der Δ zugrundeliegende ungerichtete Graph genau zwei Enden hat, dann ist Δ ein gerichteter Strip. Jeder gerichtete Strip hat genau zwei zusammengesetzte Enden. Ist Δ außerdem lokalfinit und hat der Δ zugrundeliegende ungerichtete Graph mindestens $2^{\aleph_0}$ Enden, so hat Δ wenigstens $2^{\aleph_0}$ zusammengesetzte Enden.

Der zweite Teil dieser Arbeit enthält eine vollständige Klassifizierung aller eckentransitiven planaren Strips. Jeder solche Strip hat einen der Eckentypen (3^6), $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, (4^4), (6^3), oder (4.8^2). Der zweite Parameter der Klassifizierung ist κ_∞, die minimale Anzahl von Ecken, die man aus dem Graphen entfernen muß, um wenigstens zwei unendliche Komponenten zu erhalten. In fast allen Fällen ist ein dritter Parameter nötig. Dieser Parameter nimmt aber nur endlich viele Werte an.